Matemática

Noções elementares de lógica

$\rightarrow$

$\vee$

$\leftrightarrow$

$\wedge$

Material suplementar ao livro Matemática – Construção e Significado.

Moderna

Noções elementares de lógica

Desde Aristóteles e principalmente durante o século XX, a lógica experimentou um desenvolvimento monumental em direção a assuntos altamente especializados, que hoje é considerada praticamente um ramo da matemática. Foi principalmente por causa dos estudos em lógica que hoje podemos nos sentar diante de um computador pessoal e nos conectar com o restante do planeta para trocar informações, desenvolver pesquisas ou simplesmente nos divertir.

Objetivos

- Caracterizar a noção de argumento válido.
- Verificar se um argumento sentencial é válido.
- Simbolizar argumentos sentenciais.
- Manipular tabelas de verdade.
- Identificar conjuntos inconsistentes de sentenças.
- Verificar se uma sentença é tautologia, contradição ou contingência.

Teste seus conhecimentos prévios!

a) Dê um exemplo de argumento extraído de um texto de matemática.

b) Em uma cidade havia um barbeiro que fazia a barba de todos e somente daqueles que não se barbeavam a sim próprios. Pergunta: Quem fazia a barba do barbeiro?

1 Argumentos válidos

1.1 Definição de argumento

Em nossa vida freqüentemente nos encontramos em situações que envolvem o conceito de argumentação.

- Ao explicar o motivo de ter tirado determinada nota em uma prova
- Ao justificar porque tivemos que ficar até mais tarde no colégio
- Ao fazer um pedido para ir a uma festa no fim de semana.

Nosso primeiro problema será investigar a seguinte questão:

O que é um argumento?

Para isso, façamos uma lista daquilo que intuitivamente poderia ser considerado como um argumento. Eis algumas possibilidades:

a) Todo homem é mortal.
Sócrates é homem.
Logo, Sócrates é mortal.

b) Se João é professor, então ele dá aulas.
João é professor.
Logo, ele dá aulas.

c) Todos os corvos observados até o momento são negros.
Logo, todos os corvos são negros

Reflita

Será que todos os argumentos ao lado são válidos?

1.2 Características dos argumentos

1. Argumento é um tipo de discurso que envolve um conjunto de sentenças.

2. Argumentos não envolvem sentenças do tipo imperativo como “Feche a porta” ou interrogativo como “Qual é o seu nome?”.

3. Em um argumento sempre há uma sentença declarativa (as que aparecem nos exemplos acima após a palavra “logo”) que constitui a conclusão do mesmo, e que é apoiado pelas outras sentenças declarativas que são as premissas da argumentação.

4. Argumentos só possuem sentenças declarativas.

Uma **sentença declarativa** é uma sentença que apresenta um pensamento completo e que pode ser classificada como verdadeira ou falsa.

Observação

Alguns autores preferem chamar as sentenças declarativas de **proposições.**

Nesse texto, preferimos chamar sentença declarativa por somente **sentença.**

Diante das considerações acima podemos agora apresentar uma formulação precisa do que vem a ser um argumento.

Um **argumento** é um tipo de discurso que consiste de um conjunto de sentenças declarativas sendo que uma delas, denominada de **conclusão**, é afirmada como sendo conseqüência das outras sentenças declarativas que são ditas as **premissas.**

Exercícios resolvidos

R1. Classifique os discursos abaixo em argumentativos ou não.

a) João é engenheiro ou filósofo
João não é engenheiro.
Logo, João é filósofo.

b) Para fazer prova é preciso silêncio
Logo, a partir de agora todos fiquem quietos!

Solução

a) É argumento.
b) Não é argumento (a segunda sentença é imperativa).

Exercícios propostos

1. Identifique premissas e conclusão dos seguintes argumentos e escreva a sua forma lógica

a) Todos os cientistas são boas pessoas, visto que todas as boas pessoas são educadas e que todos os cientistas são educados.

b) Sabendo-se que $2 + 2 = 4$, segue-se que $2 + 2 = 1 + 3$, pois $1 + 3 = 4$.

2. Classifique os discursos em argumentativos ou não:

a) Se $x^2 = 1$, então $x = 1$ ou $x = -1$.
O número x é negativo.
Logo, $x = -1$

b) Se $x + 3 = 5$, então $x = 1$.
Logo, vá estudar que você está precisando.

1.3 Validade

Muitas vezes precisamos avaliar um argumento de forma mais aprofundada, mas nos deparamos com a seguinte pergunta:

O que significa dizer que um argumento é válido?

Somos tentados, em primeiro momento, a dizer que um argumento é válido se a conclusão é conseqüência lógica das premissas. No entanto, essa definição é inadequada, pois apenas substitui o conceito de validade pelo de conseqüência lógica.

Reflita

Tente elaborar uma definição de argumento válido.

Considere agora um argumento parecido com o primeiro exemplo da lista da seção anterior.

Todo homem é mentiroso.

Sócrates é homem.

Logo, Sócrates é mentiroso.

Nosso primeiro impulso é considerar o argumento acima como inválido pois contém uma premissa que é simplesmente falsa (não é verdade que todo homem seja mentiroso). No entanto, o que aconteceria se admitíssemos que as premissas são ambas verdadeiras, isto é, que todos os homens são mentirosos e que Sócrates é homem? Nesse caso, somos forçados a admitir que Sócrates é mentiroso.

É precisamente esse raciocínio que nos leva à noção de argumento válido ou de conseqüência lógica. Repare que ambos os argumentos sobre Sócrates tem a mesma forma lógica expressa por:

Todo h é m.
s é h.
Logo, s é m.

Sendo que estamos substituindo cada sentença por uma letra, ou seja, fazemos as seguintes substituições:

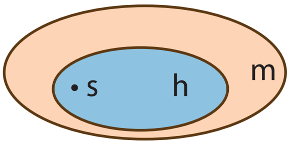
h: classe dos homens.

m: classe dos mentirosos.

s: refere-se a um homem. (é um objeto de uma classe)

Qualquer argumento que tenha essa forma é **válido**, independentemente do que sejam as classes h e m e o objeto s. Pois se todos os objetos de classe h são objetos da classe m e se s é um objeto de h, então sabemos que s é um objeto de m também.

Esse esquema pode ser visualizado pela seguinte figura.



Somos, assim, levados à seguinte definição de argumento válido:

Um argumento é **válido** se toda situação que torne as premissas verdadeiras torne também a conclusão verdadeira. Ou, de outro modo, um argumento é válido se não existe situação que torne as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.

Reflita

O que acontece se, em um argumento, considerarmos também sentenças que não são declarativas, como as imperativas ou interrogativas?

Vejamos como aplicar essa definição em casos concretos.

Exercícios resolvidos

R1. Analise o argumento:
Todo homem é mortal
Sócrates é mortal
Logo, Sócrates é homem

Solução

O argumento tem a forma:
Todo h é m.
s é m.
Logo, s é h.

Queremos concluir que o argumento é inválido, ou seja, para alguma situação o argumento deve ter uma conclusão falsa com as premissas verdadeiras. Para isso, basta imaginar que Sócrates é o nome de um cachorro, então:

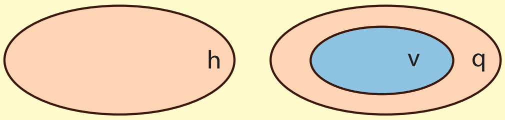
h: Classe dos homens.
m: Casse dos mortais.
s: Refere-se a um cachorro.

Nesse caso, as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Logo, pela definição, o argumento é inválido.

R2. Analise o argumento.
Nenhum homem é quadrúpede
Toda vaca é quadrúpede.
Logo, nenhuma vaca é homem.

Solução:

O argumento é válido, pois a forma lógica é:
Nenhum h é q
Todo v é q
Logo, nenhum v é h
e sua validade decorre da figura



Exercícios propostos

1. Analise os argumentos.

a) Nenhum homem é mortal.
Todo mortal fala.
Logo, todo homem fala.

b) Nenhum homem é mortal.
Sócrates é homem.
Logo, Sócrates é mortal.

2. Verifique a validade dos seguintes argumentos:

a) Todo p é m.
Algum s é m.
Algum s é p.

b) Todo m é p
Todo s é m.
Todo s é p.

c) Nenhum p é m.
Algum s não é m.
Algum s não é p.

d) Algum m é p.
Todo m é s.
Nenhum s é p.

e) Todo p é m.
Todo m é s.
Todo s é p.

f) Algum p não é m.
Todo s é m.
Todo s é p.

1.4 Dedução e indução

Literatura. Em um famoso conto de Sir Arthur Conan Doyle, o brilhante detetive inglês Sherlock Holmes conclui, a partir da observação de que a mão direita de um cavalheiro era maior do que a esquerda, diante do estupefato olhar do Dr. Watson, que o homem em algum momento já fora um trabalhador braçal.

É claro que o argumento feito por Sherlock Holmes não é um argumento válido, no sentido de validade que vimos estudando. No entanto existe uma série de argumentos que, embora não sendo válidos, são muito úteis nas atividades da vida diária e mesmo no contexto do conhecimento científico. São os argumentos indutivos.

Observação

O conto em questão chama-se "A liga dos Cabeça-Vemelha"

Um argumento é dito **indutivo** quando a suposta verdade das premissas produz um forte apoio para a verdade da conclusão.

Por outro lado, quando um argumento possui a intenção de que a suposta verdade das premissas implique **necessariamente** a verdade da conclusão, dizemos que o argumento é **dedutivo**. E é somente nesse caso que aplicamos a noção de validade discutida anteriormente.

Argumentos indutivos podem ser fortes ou fracos dependendo do grau de apoio que as premissas fornecem à conclusão.

Exemplos

1. João possui dois filhos.
Logo, João é casado.

2. Todos os corvos observados até agora são negros.
Logo, todos os corvos são negros.

Uma característica importante dos argumentos indutivos é que o conteúdo expresso na conclusão vai além do conteúdo expresso nas premissas.

Mais um exemplo

Leia o argumento:

Todo homem é mortal.
Sócrates é homem, logo
Sócrates é mortal.

Neste caso, o conteúdo da conclusão está implícito nas premissas

Embora em matemática argumentos indutivos não sejam utilizados, eles podem ajudar a aumentar o grau de confiança em certas proposições.

Informática. Computadores poderosos estão trabalhando para testar a conjectura de Goldbach que diz: "Todo número par maior do que dois é a soma de dois números primos". Esses computadores já verificaram que ela é verdadeira para pares até um trilhão. Isso é um forte apoio indutivo para que o enunciado seja de fato verdadeiro para todos os números.

Exercícios propostos

Classifique os argumentos em indutivos e dedutivos.

1. Alfredo é mais alto que Pedro.
Pedro é mais alto que Joaquim.
Logo, Alfredo é mais alto que Joaquim

2. A maioria dos alunos dessa sala são altos.
João é um aluno desse sala.
Logo, João é alto.

3. $1 = 1 = 1^2$
$1 + 3 = 4 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 8 = 2^3$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 2^4$

Logo, toda soma de números ímpares consecutivos sempre começando por 1 dá sempre um número que é uma potência de 2.

2. Cálculo Sentencial

2.1. Linguagem Sentencial

Filosofia. Se Deus quisesse evitar o mal e fosse incapaz de consegui-lo, então seria impotente; se fosse capaz de evitar o mal e não quisesse fazê-lo, então seria malevolente. Se o mal existe, então Deus não pode ou não quer impedi-lo. O mal existe. Se Deus existe, então não é impotente nem malevolente. Portanto, Deus não existe.

Observação

O argumento ao lado é inválido. Mais adiante o analisaremos novamente. Esse argumento pode ser encontrado em:

Irving M. Copi. *Introdução à Lógica*. Editora Mestre Jou. São Paulo. Segunda edição, 1978. página 279.

A lógica nos fornece ferramentas que tornam possível reescrever sentenças declarativas da língua corrente, no caso o português, em suas formas lógicas, que ressaltam a estrutura relevante para estudarmos a sentença. Com essas ferramentas da lógica, poderemos de maneira quase que automática verificar se argumentos como o de cima são válidos ou não.

Essas ferramentas consistem em extrair a forma lógica do argumento, ou seja, trabalhamos apenas com palavras do tipo: se, então, logo, portanto, etc. Para isso, utilizamos símbolos no lugar das sentenças.

Exemplo

Vamos achar a forma lógica do argumento acima. Utilizaremos os seguintes símbolos para cada sentença:

q: Deus quer evitar o mal;

c: Deus é capaz de evitar o mal;

i: Deus é impotente;

m: Deus é malevolente;

e: O mal existe;

d: Deus existe;

Com isso, a forma lógica do argumento fica:

Se q e não c, então i.

Se c e não q, então m.

Se e, então não c ou não q.

e.

Se d, então não i e não m.

Portanto, não d.

Observação

Para escrever a negação de alguma sentença p, dizemos **não p.**

Para analisar a validade de um argumento, precisamos entender como se estrutura uma linguagem em que aparecem sentenças do tipo **não p**, p **ou q**, **p e q**, **se p então q**, etc. Assim, definimos o conceito de linguagem sentencial.

Uma **linguagem sentencial** possui os seguintes símbolos:

a) Letras sentenciais: utilizaremos letras minúsculas (p, q, r,...)

b) Conectivos Lógicos: São símbolos que constroem novas sentenças (~, ∧, ∨, →, ↔)

c) Parênteses "(" e ")";

Vamos ver o que cada conectivo lógico citado significa:

~ é o símbolo de negação (lê-se "não");

∨ é o símbolo de disjunção (lê-se "ou");

∧ é o símbolo de conjunção (lê-se "e");

→ é o símbolo de implicação (lê-se "se..., então..." ou "implica");

↔ é o símbolo de equivalência (lê-se "...se e somente se..." ou "equivale");

+ detalhes

Os símbolos (~, ∧, ∨, →, ↔) são **conectivos binários**, pois formam uma nova sentença a partir de duas sentenças.

O símbolo ~ é um **conectivo unário**, pois precisa apenas de uma sentença para formar uma nova.

Percebemos então que na linguagem sentencial temos uma espécie de gramática simples que nos ensina a construir sentenças.

Uma **sentença** da linguagem sentencial é uma seqüência finita de símbolos listados acima que cumpre as seguintes regras, considerando que X e Y são sentenças:

R1. Uma letra sentencial isolada é uma sentença;
R2. ~X – não X – é uma sentença;
R3. (X∨Y) - X ou Y - é uma sentença;
R4. (X∧Y) - X e Y - é uma sentença;
R5. (X→Y) - X implica Y - é uma sentença;
R6. (X↔Y) - X se e somente se Y – é uma sentença;

Exemplo

- p é uma letra sentencial. Então, pela primeira regra, é uma sentença.
- Como p é uma sentença então, pela segunda regra, ~p também é uma sentença.
- Como ~p é uma sentença então, pela terceira regra, ~~p também é uma sentença. Assim, ~~~p e ~~~~p também são sentenças (usando a mesma regra).
- Como P e ~P são sentenças, então (p∨~p), (p∧~p), (p→~p) e (p↔~p) também são sentenças.

Com essa linguagem, também conseguimos escrever sentenças, de forma curta, que na linguagem natural (português) seriam um pouco mais complexas. Tais como:

- ((p→q)→r)
- ((~p∨~~q)↔(r∧s))
- (((a∨b)∨c)∨d)

Percebemos também que o que cada sentença (letra) significa já não é tão relevante.

Mais exemplos

Não são sentenças:

- ~~~
- (A∨B)) - parênteses em excesso.
- A∧(B) - parênteses em posição errada.
- (AB∧) – o ∧ está fora de lugar.
- A~ - os símbolos estão em ordem trocada.

Exercícios propostos

1. Dê 5 exemplos de seqüências que são sentenças e exemplos de seqüências que não são sentenças.

2. Dê um exemplo de sentença em que aparecem todos os conectivos lógicos.

3. Construa um argumento em linguagem natural usando os conectivos e depois o traduza para a linguagem simbólica que aprendeu.

4. Passe para a linguagem simbólica o argumento sobre a inexistência de Deus presente no início do capítulo.

2.2 Tabuadas de verdade

Atendimento. Um cliente de uma sorveteria pede ao atendente um sorvete com duas bolas, sabor de chocolate ou creme, e recebe um sorvete com uma bola com sabor chocolate e outra sabor creme. O atendente está correto?

Essa é uma situação típica em que uma análise lógica do que foi dito se faz necessária. Como se comporta a verdade "p ou q" quando se sabe das verdades p e q separadamente?

Neste caso, p significa "quero sabor chocolate" e q, "quero sabor creme"

Existe uma certa semelhança entre as notações da lógica e expressões matemáticas. O que acontece com a expressão $(x + y)$ quando $x = 2$ e $y = 3$? É claro que nesse caso a expressão é igual a 5, pois $5 = 2 + 3$. A pergunta que temos aqui é análoga: o que acontece com "p ou q" quando, por exemplo, p é verdadeira e q é falsa?

Existem dois valores de verdade que são o verdadeiro e o falso e que os mesmos serão representados respectivamente pelas letras maiúsculas V e F.

Do mesmo modo que na aritmética era necessário se familiarizar com tabuadas para lidar com as operações, em lógica temos as tabuadas de valores de verdade para lidar com os conectivos.

Tabuada da negação ~ (não)

Se uma sentença é verdadeira (V), então a sua negação é falsa (F) e se for falsa, sua negação é verdadeira.

X	~X
V	F
F	V

Exemplo

Se a sentença "Sócrates é homem" é verdadeira, então a sentença "Sócrates não é homem" é falsa.

A tabuada de verdade da negação envolve dois princípios importantes da lógica clássica. São eles:

Princípio do terceiro excluído: Para toda sentença X e sua negação ~X, uma delas tem que ser verdadeira.

Princípio de não contradição: Para toda sentença X e sua negação ~X, uma delas tem que ser falsa.

Esses dois princípios implicam que só existem dois valores de verdade, o **verdadeiro** e o **falso**. Já havíamos assumido a existência desses valores.

Tabuada da conjunção ∧ (e)

Uma conjunção só é verdadeira quando ambas as sentenças são verdadeiras

X	Y	$(X \wedge Y)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Quando dizemos que "p e q" é verdadeira, estamos afirmando que tanto p como q são verdadeiras.

Tabuada da disjunção ∨ (ou)

Uma disjunção só é falsa quando ambas as sentenças são falsas.

X	Y	$(X \vee Y)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Quando dizemos "p ou q", queremos dizer que pelo menos uma das sentenças é verdadeira. Voltando ao exemplo do sorvete, se dizemos que queremos "sabor chocolate ou creme", o sorvete, com duas bolas, poderia vir de três maneiras diferentes: duas bolas de chocolate, duas bolas de creme ou uma bola de chocolate e outra de creme. De outra forma: "p ou q ou ambos".

Tabuada da implicação (ou condicional) $\rightarrow$

Em uma implicação (X→Y), chamamos X de **antecedente** e Y de **conseqüente.**

Uma implicação só é falsa quando o antecedente é verdadeiro e o conseqüente é falso.

X	Y	(X→Y)
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Analisando melhor a idéia de implicação, podemos perceber como é a construção da tabuada.

Exemplo

Suponha que João fez a seguinte promessa a Antonio: "Se fizer sol amanhã, então passarei na sua casa."

Existe 4 possibilidades:

1. Fez sol e passou na casa.

2. Fez sol e não passou na casa.

3. Não fez sol e passou na casa.

4. Não fez sol e não passou na casa.

Em qual das possibilidades a situação foi descumprida?

É razoável aceitar que a promessa foi cumprida nas possibilidades 1 e 4 e descumprida na possibilidade 2, mas a possibilidade 3 costuma gerar dúvidas. Afinal, se não fez sol e mesmo assim João passou na casa de Antonio, a promessa foi cumprida ou descumprida?

Na verdade, João só disse o que aconteceria se fizesse sol, mas não disse o que aconteceria se não fizesse sol. Portanto, podemos considerar que João cumpriu sua promessa. João teria descumprido a promessa se tivesse dito: "Só vou à sua casa se fizer sol".

Observação

A terceira linha da tabuada da implicação nos dá a resposta sobre a possibilidade 3.

Tabuada de Equivalência (ou bicondicional) $\leftrightarrow$

Duas sentenças são equivalentes quando ambos os valores de verdade são iguais, ou seja, são ambos verdadeiros ou são ambos falsos.

X	Y	(X↔Y)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Afirmar que duas sentenças são equivalentes é o mesmo que afirmar que a primeira sentença implica na segunda e que a segunda implica na primeira. Na linguagem simbólica:

$(p \leftrightarrow q)$ é o mesmo que $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$

2.3 Calculando com tabuadas

É comum, no estudo de expressões algébricas, calcularmos o valor de expressões do tipo

$$(x + y) \times y \div z$$

para determinados valores de x, y e z. Se x = 2, y = 3 e z = 5, temos:

$(2 + 3) \times 2 \div 5 =$

$5 \times 2 \div 5 =$

$10 \div 5 = 2$

Nesses cálculos, existem certas regras para que haja uma ordem para se efetuar as operações, por exemplo, calcula-se primeiro o que está entre os parênteses. Com as tabuadas de verdade, também teremos regras semelhantes.

Exercícios resolvidos

R1. Considere a sentença $(((\sim p \vee q) \rightarrow r) \wedge q)$ e calcule o valor verdade para a seguinte substituição: p - V, q - F e r - V.

Solução

$(((\sim p \vee q) \rightarrow r) \wedge q) =$

$(((\sim V \vee F) \rightarrow V) \wedge F) =$

$(((F \vee F) \rightarrow V) \wedge F) =$

$((F \rightarrow V) \wedge F) =$

$(V \wedge F) = F$

Exercícios propostos

Calcule o valor de verdade das sentenças abaixo com as seguintes substituições: p - V, q - v, r - F e s - F.

1. $(\sim p \vee q)$
2. $((p \rightarrow q) \vee s)$
3. $(\sim (p \rightarrow s) \wedge r)$
4. $(\sim\sim s \leftrightarrow \sim\sim\sim\sim r)$
5. $((s \rightarrow \sim p) \vee (s \wedge r))$
6. $((r \rightarrow p) \rightarrow r)$
7. $(r \rightarrow (p \rightarrow r))$
8. $(p \vee (p \wedge \sim q))$
9. $((p \wedge \sim\sim p) \rightarrow (r \vee q))$
10. $(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s)))$
11. $\sim (\sim p \rightarrow q)$
12. $(\sim (r \rightarrow \sim\sim s) \rightarrow (\sim p \vee q))$
13. $((q \wedge \sim r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \sim s))$
14. $((p \leftrightarrow r) \leftrightarrow (q \leftrightarrow s))$
15. $(\sim (p \wedge \sim p) \rightarrow (r \vee \sim r))$

Reflita

Se mudarmos a ordem dos parênteses, a sentença continua a mesma?

2.4 Construindo tabelas de verdade

A tabela de verdade consiste em registrar não apenas uma possível substituição de valor, mas todas as possíveis combinações.

Exemplo

Construa a tabela de verdade da seguinte sentença: $((\sim p \vee q) \rightarrow p)$

Temos quatro possibilidades:

1. p - V e q - V.

$((\sim p \vee q) \rightarrow p)$

$((\sim V \vee V) \rightarrow V)$

$((F \vee V) \rightarrow V)$

$(V \rightarrow V) = V$

2. p – V e q – F.

$((\sim p \vee q) \rightarrow p)$

$((\sim V \vee F) \rightarrow V)$

$((F \vee F) \rightarrow V)$

$(F \rightarrow V) = V$

3. p - F e q - V.

$((\sim p \vee q) \rightarrow p)$

$((\sim F \vee V) \rightarrow F)$

$((V \vee V) \rightarrow F)$

$(V \rightarrow F) = F$

4. p - F e q - F.

$((\sim p \vee q) \rightarrow p)$

$((\sim F \vee F) \rightarrow F)$

$((V \vee F) \rightarrow F)$

$(V \rightarrow F) = F$

Colocando os resultados em uma tabela, temos:

p	q	((~p∨q)→p)
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Podemos ainda construir uma tabela mais completa, que registre os cálculos intermediários.

q	q	~p	(~p∨q)	((~p∨q)→p)
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	F

Exercícios resolvidos

Construa a tabela de verdade das sentenças abaixo:

1. ((~p→p)→p)

Solução

P	~p	(~p→p)	((~p→p)→p)
V	F	V	V
F	V	F	V

2. ((p↔q)∨(~p→q))

Solução

p	q	(p↔q)	~p	(~p→q)	((p↔q)∨(~p→q))
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V

Exercícios propostos

Construa a tabela de verdade das seguintes sentenças

1. (~~p→~p)
2. ((p∨~p)∧~p)
3. ((p↔q)→p)
4. (p↔(q→p))
5. (~p∨(q→q))
6. (p→(q→(~p∨~q)))
7. ((p↔q)↔~p)
8. ((p→q)→(~q→~p))

2.5 Tabelas de grandes sentenças

As tabelas que trabalhamos até agora possuíam 2 ou 4 linhas, mas podemos utilizá-las para registrar valores de verdade de sentenças maiores.

O número de linhas da tabela está relacionado com o número de combinações de valores de verdade e o número de letras sentenciais presentes em uma sentença

1. Uma letra sentencial

Assume o valor Verdadeiro ou Falso (2 possibilidades)

2. Duas letras sentenciais

(4 possibilidades)

p	q
V	V
	F
F	V
	F

3. Três letras sentenciais
(8 possibilidades)

p	q	r
V	V	V
		F
	F	V
		F
F	V	V
		F
	F	V
		F

Continuando o raciocínio, é fácil ver que:

nº de letras	nº de linhas
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
...	...
n	2^n

Exemplo

Vejamos uma tabela de uma sentença com três letras:
$((\sim p \rightarrow q) \wedge \sim r)$

p	q	r	$\sim p$	$\sim p \rightarrow q$	$\sim r$	$((\sim p \rightarrow q) \wedge \sim r)$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	F	V	F

Exercícios propostos

Construa tabelas de verdade para as seguintes sentenças com três letras sentenciais:

1. $((p \vee q) \rightarrow \sim r)$
2. $((\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (p \wedge r))$
3. $((p \rightarrow q) \rightarrow r)$
4. $(\sim(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \wedge r))$
5. $((p \wedge \sim p) \rightarrow (r \wedge \sim r))$
6. $(p \rightarrow (q \rightarrow \sim r))$
7. $((\sim p \vee (q \rightarrow r)) \wedge \sim q)$
8. $((\sim \sim p \leftrightarrow r) \leftrightarrow \sim \sim s)$

3. Argumentos sentenciais e validade

3.1 Validade

Voltemos ao nosso problema de encontrar um método que nos permita dizer se um argumento escrito em linguagem sentencial é válido. Vejamos novamente o exemplo:

Se João é professor, então ele dá aulas.

João é professor.

Logo, ele dá aulas.

O argumento pode ser formalizado da seguinte maneira:

Se p então a.

p.

Logo, a.

E simbolizado como:

$$\begin{array}{l} (p\rightarrow a) \\ \underline{p} \\ a \end{array}$$

+ detalhes

A simbolização que utiliza a linguagem sentencial, separa as premissas da conclusão por um traço horizontal.

O argumento que corresponde à forma lógica acima é conhecido como **modus ponens.**

Ao invés de fazer uma tabela de verdade para cada sentença do argumento (premissas e conclusão), faremos apenas uma tabela para todas as sentenças envolvidas.

p	a	(p→a)	p	a
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F
		premissas		conclusão

Retomemos a seguinte definição:

Um argumento é válido se não existe situação que torne as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.

No argumento acima, as situações que tratam essa definição são exatamente as linhas das tabelas de verdade. Como em nossa tabela não há nenhuma linha em que as premissas são verdadeiras e a conclusão falsa, então o argumento é válido.

Exemplo

Decida se o seguinte argumento é válido:

Se João é professor, então ele dá aulas.

João dá aulas.

Logo, João é professor.

Podemos reescrever o argumento utilizando símbolos:

$$\begin{array}{l} (p\rightarrow a) \\ \underline{a} \\ p \end{array}$$

Assim, a tabela fica:

p	a	(p→a)	a	p
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	F
		premissas		conclusão

Como na terceira linha da tabela temos as premissas verdadeiras e a conclusão falsa, o argumento é inválido. Com base no que foi visto, definimos:

Um argumento em linguagem sentencial é **válido** se não existe linha na sua tabela de verdade em que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão seja falsa.

Exercícios propostos

Estude a validade dos seguintes argumentos construindo uma tabela para cada um deles.

1. $\dfrac{\begin{array}{l}(p\rightarrow q)\\ \sim q\end{array}}{\sim p}$

2. $\dfrac{\begin{array}{l}(p\rightarrow q)\\ \sim p\end{array}}{\sim q}$

3. $\dfrac{a}{(a\vee b)}$

4. $\dfrac{\begin{array}{l}a\\ b\end{array}}{(a\wedge b)}$

5. $\dfrac{\sim\sim a}{a}$

6. $\dfrac{a}{\sim\sim a}$

7. $\dfrac{\begin{array}{l}(p\rightarrow(q\vee\sim p))\\ q\end{array}}{\sim p}$

8. $\dfrac{\begin{array}{l}p\leftrightarrow q\\ \sim\sim p\end{array}}{q}$

9. $\dfrac{p\vee(q\wedge\sim p)}{((p\vee q)\wedge(p\vee\sim p))}$

10. $\dfrac{\begin{array}{l}p\rightarrow q\\ q\rightarrow r\end{array}}{p\rightarrow r}$

11. $\dfrac{\begin{array}{l}(p\rightarrow(q\rightarrow r))\\ (q\rightarrow(p\rightarrow r))\end{array}}{(p\rightarrow r)}$

12. $\dfrac{\begin{array}{l}(p\rightarrow(q\wedge r))\\ ((q\vee r)\rightarrow\sim p))\end{array}}{(\sim p\vee q)}$

13. $\dfrac{\begin{array}{l}(p\vee q)\\ (q\vee r)\end{array}}{\sim(p\vee r)}$

14. $\dfrac{\begin{array}{l}(p\rightarrow\sim q)\\ (q\rightarrow r)\end{array}}{(q\vee r)}$

3.2 Consistência

Um argumento que traz uma conclusão que não se relaciona com as premissas faz com que imaginemos que ele é inválido. No entanto, pela definição de validade de um argumento, podemos verificar que ele pode ser válido, mesmo que pareça um pouco esquisito.

Exemplo

Vamos verificar a validade do seguinte argumento:

João é professor.
João não é professor.
Logo, a lua é feita de queijo.

Em símbolos, o argumento fica:

$$\dfrac{\begin{array}{c}p\\ \sim p\end{array}}{Q}$$

E sua tabela de verdade é:

p	q	p	~p	q
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

premissas — conclusão

Pela nossa definição, o argumento acima é válido, pois não há na tabela de verdade nenhuma linha em que as premissas são verdadeiras e a conclusão falsa.

Argumentos como este nos sugerem a importância de entender quando um conjunto de sentenças é consistente e quando não o é.

Observação

Situações como essa costumam acontecer quando as premissas são uma a negação da outra.

Um conjunto de sentenças é dito **inconsistente** se não existe uma linha da tabela de verdade do conjunto em que todas as sentenças são verdadeiras. Caso contrário, ele é dito **consistente.**

Disso extraímos uma importante propriedade:

Se em um argumento as premissas formarem um conjunto inconsistente então o argumento será válido independentemente do que seja sua conclusão.

Observação

De um conjunto inconsistente, segue-se qualquer coisa. É por esse motivo que os pesquisadores matemáticos procuram evitar conjuntos inconsistentes.

Exercícios resolvidos

Analise a consistência dos seguintes conjuntos

1. $(\sim a \vee b)$
$(a \wedge \sim b)$

Solução

a	b	~a	~b	(~a∨b)	(a∧~b)
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F

O conjunto é inconsistente, pois não existe uma linha em que todas as sentenças são verdadeiras.

2. $(\sim a \vee b)$
$(\sim b \wedge c)$
$(a \rightarrow c)$

Solução

a	b	c	~a	~b	(~a∨b)	(~b∧c)	(a→c)
V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V	F
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

O conjunto é consistente, pois as linhas 1, 5, 7 e 8 apresentam valores verdadeiros para todas as sentenças.

Exercícios propostos

Verificar a consistência dos conjuntos abaixo.

1. $(a \wedge (\sim a \vee b))$
$\sim b$

2. $(\sim p \vee (q \wedge p))$
$(p \leftrightarrow \sim q)$
$\sim\sim q$

3. $(a \rightarrow b)$
$(b \rightarrow c)$
$(c \rightarrow \sim a)$

4. $(a \wedge (b \vee c))$
$(\sim b \wedge \sim c)$
$\sim a$

5. $(p \rightarrow q)$
$(q \rightarrow r)$
$\sim (p \rightarrow r)$

6. $(p \wedge q)$
$(p \rightarrow r)$
$\sim r$

7. $(r \leftrightarrow (p \vee s))$
$p \wedge r$

8. $(p \wedge \sim p)$
$(r \vee \sim r)$

3.3 Tautologias

Considere o seguinte argumento:

A lua é feita de queijo.

Logo, João é professor ou João não é professor.

Novamente, a tendência é considerar o argumento como inválido. Vamos analisá-lo:

A forma do argumento é:

$$\frac{q}{(p \vee \sim p)}$$

Construindo a tabela:

q	p	~p	q	(p∨~p)
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
			premissa	conclusão

Não existe linha da tabela em que as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Aliás, nessa tabela a conclusão nunca é falsa. Assim, esse argumento é válido mesmo que a premissa fosse qualquer outra sentença.

Uma sentença em que a tabela de verdade dá sempre verdadeira é denominada de **tautologia.**

Desse modo,

Um argumento em que a conclusão é uma tautologia é sempre válido, independentemente do que sejam suas premissas.

Podemos nomear as sentenças de uma linguagem sentencial de acordo com a seguinte classificação

- Tautologias: sentenças em que a tabela de verdade dá sempre verdadeiro.
- Contradições: sentenças em que a tabela de verdade dá sempre falso.
- Contingências: sentenças em que a tabela de verdade possui linhas com verdadeiro e linhas com falso.

Exercícios propostos

1. Classifique as sentenças como tautologias, contradição ou contingência

a) $\sim(a \wedge \sim a)$

b) $(a \rightarrow a)$

c) $(\sim a \leftrightarrow a)$

d) $(a \rightarrow (b \rightarrow a))$

e) $(a \rightarrow \sim\sim a)$

f) $(a \rightarrow (b \rightarrow (a \vee b)))$

g) $(\sim a \vee (a \wedge b))$

h) $((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (b \rightarrow (a \rightarrow c))$

2. É possível escrever uma tautologia só com os conectivos $\wedge$ e $\vee$?

3. É possível escrever uma tautologia só com o conectivo $\leftrightarrow$?

4. Dê o exemplo mais simples de uma contingência que encontrar.

5. Verifique que o argumento sobre a existência de Deus dado no início do capítulo anterior é inválido, fazendo a seguinte substituição:

Argumento	Substituição
$((q \wedge \sim c) \rightarrow i)$	q - F
$((c \wedge \sim q) \rightarrow m)$	c - F
$(e \rightarrow (\sim c \vee \sim q))$	i - F
e	m - F
$(d \rightarrow (\sim i \wedge \sim m))$	e - V
$\sim d$	d - V

4. Variáveis e quantificadores

4.1 Modificando a linguagem

Considere o seguinte argumento:

Todos os números pares são divisíveis por 2.
Todos os números divisíveis por 2 são inteiros.
Logo, todos os números pares são inteiros.

Se fôssemos analisá-lo do ponto de vista da linguagem sentencial, teríamos uma surpresa desagradável. Aparentemente não há conectivos lógicos envolvidos e, portanto a forma lógica seria simplesmente:

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline r \end{array}$$

mas isso resultaria em um argumento inválido.

Então, para solucionarmos problemas que aparecem com argumentos desse tipo, vamos enriquecer nossa linguagem simbólica.

Considere o primeiro enunciado do argumento: "Todos os números pares são divisíveis por 2"

Reparemos que o que ele afirma é que:
Para todo x, se x é um número par, então x é divisível por 2.

Novidades da análise.

- Apareceu um "para todo" na sentença
- Apareceu um x que não havia na sentença original
- Apareceu o conectivo lógico de implicação: se..., então...

O enunciado poderia ser dividido em partes

Para todo x,	se	x é um número par,	então	x é divisível por 2

Do que vimos antes, um enunciado do tipo "x é um número par" não é uma sentença simplesmente porque não é verdadeira nem falsa.

Enunciados que contém variáveis são denominadas **sentenças abertas.**

Há duas maneiras de sentenças abertas sentenciais em sentenças genuínas.

- Trocando a variável por um nome de algum objeto
  Trocando x por 2 temos "2 é um número par" que é uma sentença verdadeira.

- Quantificando a sentenças abertas.
  "Para todo x, x é um número par" que é uma sentença falsa

Exercícios propostos

1. Classifique os enunciados em sentença ou sentenças abertas:
a) é primo
b) x é maior que 2
c) para todo y, y é par ou y é ímpar
d) a aranha tem x patas
e) 3 = 4
f) Se x = 4, então x = 2 + 2.

3.2 Quantificadores

Em matemática utilizam-se dois tipos de quantificadores para expressar todos os seus enunciados:

- Quantificador universal: para todo x,...
- Quantificador existencial: existe x,...

Utilizam-se os seguintes símbolos para expressar os quantificadores:

$\forall$ x - para todo x,...
$\exists$ x - existe x,...

Quanto às funções sentenciais, elas podem ser simbolizadas trocando-se os predicados que ocorrem nas mesmas por letras maiúsculas:

Exemplo

x é um número par - Px
x é divisível por 2 - Dx

Assim, a sentença "Todos os números pares são divisíveis por 2" fica:

$\forall x(Px \rightarrow Dx)$

Exemplos

1. Algum primo é par
   Existe x, x é primo e x é par
   $\exists x(Mx \wedge Px)$ em que Mx é "x é primo".

2. Nenhuma fração **irredutível** é a raiz quadrada de 2.
Não existe x, x é fração **irredutível** e x é raiz quadrada de 2
$\sim\exists x(Fx \wedge Qx)$

Com quantificadores podemos escrever sentenças que envolvem mais de uma quantificação ao mesmo tempo.

Exemplo

1. Sabemos que o conjunto dos números naturais é infinito, ou seja, para todo número natural sempre existe um número natural que é maior que ele. Isso poderia ser simbolizado como: Para todo x, existe y, y > x. Em símbolos fica:
$\forall x \exists y(y > x)$
Vamos retornar novamente à conjectura de Goldbach, que afirma que "todo número par maior do que dois é a soma de dois números primos". Utilizando os quantificadores, teremos:
Para todo x, se x é par e x é maior do que 2, então existe y, existe z, y é primo e z é primo e x + y = z. Em símbolos:
$\forall x((Px \wedge x>2) \rightarrow \exists y \exists z((My \wedge Mz) \wedge y + z = x))$

Exercícios propostos

1. Simbolizar os seguintes enunciados utilizando quantificadores e variáveis
   a) Todo triângulo é polígono
   b) Nenhum número irracional é fracionário
   c) Quando somamos dois pares e resultado é par

Autor: Edelcio Gonçalves de Souza

Doutor em Filosofia (USP), Professor Associado do Departamento de Filosofia da PUC-SP, especialista em lógica matemática e filosofia da ciência.

Edição de texto: Renato Douglas Gomes Ribeiro

Licenciado em Matemática (USP)

Revisão:

Diagramação: A&M design - (11) 8218.6061